Übungen zur Vorlesung "Architektur und Programmierung von Grafik- und Koprozessoren"
Übungsblatt 4

Sommersemester 2019

4 Computergrafik

Aufgabe 4.1

Gegeben seien Dreiecke, die durch Vertices *in Fensterkoordinaten* v_1, v_2 und v_3 definiert sind. Trifft man die vereinfachende Annahme, dass geometrische, aus Dreiecken zusammengesetzte Objekte geschlossen sind und immer nur von außen betrachtet werden, kann man vor dem Rendern bereits viele Dreiecke vom Zeichnen ausschließen. Man legt eine Konvention bzgl. der Orientierung gemäß Uhrzeigersinn der Dreiecke (engl. "winding order") fest. v_1 und v_2 bilden eine gerichtete Kante und teilen die Ebene in zwei Hälften. Liegt nun v_3 in der linken Hälfte der Ebene, ist die *winding order* des Dreiecks gegen den Uhrzeigersinn. Wir legen (beliebig) fest, dass wir solche Dreiecke von der Vorderseite sehen. Liegt v_3 in der rechten Hälfte, sehen wir das Dreieck von der Rückseite und müssen es aufgrund unserer vereinfachenden Annahme nicht weiter betrachten. Das Vorgehen bezeichnet man als "backface culling".

Die Orientierung des Dreiecks kann man leicht ermitteln, indem man das Vorzeichen der Determinante der Eckpunktsmatrix in homogenen Koordinaten berechnet:

$$\det T = \begin{vmatrix} v_{1x} & v_{2x} & v_{3x} \\ v_{1y} & v_{2y} & v_{3y} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_{2x} - v_{1x} & v_{3x} - v_{1x} \\ v_{2y} - v_{1y} & v_{3y} - v_{1y} \end{vmatrix}$$

Für nicht degenerierte Dreiecke (bei letzteren sind die drei Eckpunkte kolinear) ist bzgl. unserer Konvention für "front faces" das Vorzeichen positiv und für "back faces" das Vorzeichen negativ.

a.)
Rechnen Sie für die Dreiecke

$$\begin{aligned} T_1 &= \{v_1 = (2,2), v_2 = (4,2), v_3 = (4,4)\}, \\ T_2 &= \{v_1 = (5,5), v_2 = (2,10), v_3 = (10,5)\} \end{aligned}$$

aus, ob sie back faces oder front faces sind.

b.)
Der Scan Konvertierungsalgorithmus von Pineda, den wir in der Vorlesung kennengelernt haben, lässt sich auf den gleichen geometrischen Zusammenhang zurückführen. Zeigen Sie, wie die Determinante einer Matrix wie in Aufgabenteil **a.)**, bestehend aus zwei 2D Punkten v_i, v_{i+1} sowie einem Rasterpunkt $p = (x, y)$ in der Ebene, mit den Kantenfunktionen $E_i(x, y)$ aus dem Algorithmus von Pineda zusammenhängt. Nehmen Sie wie in der Vorlesung an, dass die zur Kantenfunktion gehörige Kante gemäß $e_i = v_i - v_{i+1}$ gebildet wird.

c.)
Gegeben sei das Dreieck $T = \{v_1, v_2, v_3\}$ mit

$$\begin{aligned} e_1 &= v_1 - v_2 \\ e_2 &= v_2 - v_3 \\ e_3 &= v_3 - v_1 \end{aligned}$$

und mit den drei Kantenfunktionen

$$\begin{aligned} E_1(x, y) &= (x - v_{1x})e_{1y} - (y - v_{1y})e_{1x} \\ E_2(x, y) &= (x - v_{2x})e_{2y} - (y - v_{2y})e_{2x} \\ E_3(x, y) &= (x - v_{3x})e_{3y} - (y - v_{3y})e_{3x}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für einen Punkt (x, y) in der Ebene

$$2A(T) = E_1(x, y) + E_2(x, y) + E_3(x, y)$$

gilt, wobei $A(T)$ die Fläche von T bezeichne.

d.)
Baryzentrische Koordinaten hinsichtlich Dreiecken sind Tripel $b(p) = b(x, y) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, wobei $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ Gewichte für die Dreieckseckpunkte sind. Für jeden Punkt (x, y) in der Ebene und das Dreieck $T = \{v_1, v_2, v_3\}$ gibt es ein solches Tripel, sodass gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 &= (x, y), \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 1 \end{aligned}$$

Bzgl. der Dreieckseckpunkte gilt: $b(v_1) = (1, 0, 0)$, $b(v_2) = (0, 1, 0)$ und $b(v_3) = (0, 0, 1)$.

Zeigen Sie, dass für die Kantenfunktionen aus Aufgabenteil **c.)** und für $b(x, y)$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{E_2(x, y)}{2A(T)} \\ \lambda_2 &= \frac{E_3(x, y)}{2A(T)} \\ \lambda_3 &= \frac{E_1(x, y)}{2A(T)} \end{aligned}$$

gilt, wobei $A(T)$ die Fläche von T bezeichne.

Aufgabe 4.2

a.)

Quaternionen sind eine Erweiterung der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ und sind definiert als

$$\mathbb{H} = \{q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} : q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\}, \tag{1}$$

wobei für $\mathbf{i}$,$\mathbf{j}$ und $\mathbf{k}$ gilt:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass daraus die Identitäten

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k}, \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \mathbf{ki} = \mathbf{j} \tag{3}$$

sowie

$$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji}, \mathbf{jk} = -\mathbf{kj}, \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} \tag{4}$$

folgen.

b.)

Die (i. Allg. nicht kommutative) Multiplikation von zwei Quaternionen $p = p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}$ und $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ ist definiert als

$$\begin{aligned} pq \;=\; & (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) \\ & + (p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2)\,\mathbf{i} \\ & + (p_0q_2 - p_1q_3 + p_2q_0 + p_3q_1)\,\mathbf{j} \\ & + (p_0q_3 + p_1q_2 - p_2q_1 + p_3q_0)\,\mathbf{k}. \end{aligned} \tag{5}$$

Zeigen Sie dies mit Hilfe der Rechenregeln aus **a.)**.

c.)
Das Quaternion

$$\bar{q} = q_0 - q_1\mathbf{i} - q_2\mathbf{j} - q_3\mathbf{k} \tag{6}$$

nennt man das *Konjugierte* zu q. Weiterhin sei das *Einheitsquaternion* für $q \neq 0$ gegeben als

$$\frac{q}{|q|} = \frac{q_0}{|q|} + \frac{q_1}{|q|}\mathbf{i} + \frac{q_2}{|q|}\mathbf{j} + \frac{q_3}{|q|}\mathbf{k}, \tag{7}$$

wobei

$$|q| := \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}. \tag{8}$$

Gegeben sind die Eckpunktsvektoren der Box

$$\begin{aligned} \mathbf{v_1} &= (1,0,0) \\ \mathbf{v_2} &= (2,0,0) \\ \mathbf{v_3} &= (2,2,0) \\ \mathbf{v_4} &= (1,2,0). \end{aligned}$$

Führen Sie für jeden dieser Vektoren die Operation $qv\bar{q}$ durch. Dafür sind das Einheitsquaternion

$$q = cos\left(\frac{30°}{2}\right) + s_1 sin\left(\frac{30°}{2}\right)\mathbf{i} + s_2 sin\left(\frac{30°}{2}\right)\mathbf{j} + s_3 sin\left(\frac{30°}{2}\right)\mathbf{k}$$

sowie der Vektor $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3) = (0,0,1)$ gegeben. Das Quaternion v bilden Sie, indem Sie dessen *Realteil* v_0 auf 0 setzen und die drei *Imaginärteile* v_1, v_2 und v_3 jeweils mit dem ersten, zweiten und dritten Eintrag der Eckpunktvektoren initialisieren.

Zeichnen Sie die ursprünglichen Eckpunkte der Box, sowie die nun transformierten Eckpunkte, in ein gemeinsames Diagramm ein. Was bedeutet die Operation $qv\bar{q}$ mit Bezug auf die vorgegebenen Parameter geometrisch?

Das Übungsblatt wird am 09.05.2019 besprochen.